Parallelverschiebung von Vektorräumen

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 25, 1975,
S.11-16

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Parallelverschiebung von Vektorräumen

von Hans Robert Müller

Es sei eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n der Klasse C^k $(k > 1)$ gegeben. In der Umgebung U eines Punktes P von M^n mögen die Größen x^i $(i = 1, 2, \ldots n)$ ein zulässiges (lokales) Koordinatensystem bilden. Zu P gehört dann ein n-dimensionaler Tangentialraum T^n.

Durch die Funktionen L^i_{jk} (ebenfalls der Klasse C^k) werde ein affiner Zusammenhang von M^n bestimmt. Für sie gilt das Transformationsgesetz bei Übergang zu neuen Koordinaten $'x^i$:

$$'L^i_{jk}\,\frac{\partial' x^k}{\partial x^l} = L^r_{sl}\,\frac{\partial' x^i}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial' x^j} + \frac{\partial^2\,' x^i}{\partial x^l\,\partial x^r}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial' x^j}.$$

Hiermit wird nun ein kovarianter Ableitungsprozeß und längs einer Kurve $\gamma < U$ mit der Parameterdarstellung $x^i = x^i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ eine Parallelverschiebung erklärt. Für einen kontravarianten Vektor v^i etwa erhält man:

$$D_k\,v^i = v^i_{,k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + L^i_{jk}\,v^j,$$

beziehungsweise

$$v^i_{,k}\cdot\frac{dx^k}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + L^i_{jk}\,v^j\,\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{1}$$

Wir betrachten nun r-dimensionale Unterräume $T^r < T^n$ des Tangentialraums T^n an M^n im Punkte P. Hierbei sei natürlich $r \leqslant n$. Bilden die Vektoren $\underset{a}{v}$ $(a = 1, 2, \ldots r)$ eine Basis von T^r, so ist durch sie ein Multivektor (schief-symmetrischer, kontravarianter Tensor der Ordnung r) bestimmt:

$$p^{i_1 i_2 \ldots i_r} = \delta^{a_1 a_2 \ldots a_r}_{1\;2\;\ldots\;r}\cdot \underset{a_1}{v}^{i_1}\cdot\underset{a_2}{v}^{i_2}\ldots\underset{a_r}{v}^{i_r}. \tag{2}$$

Hierbei ist $\delta^{a_1 a_2 \ldots a_r}_{1\;2\;\ldots\;r}$ eine Verallgemeinerung des *Kronecker-Symbols*, nämlich

$$\delta^{a_1 a_2 \ldots a_r}_{1\;2\;\ldots\;r} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } (a_1, a_2, \ldots a_r) \text{ eine gerade Permutation} \\ & \text{von } (1, 2, \ldots r) \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } (a_1, a_2, \ldots a_r) \text{ eine ungerade Permutation} \\ & \text{von } (1, 2, \ldots r) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Übergang zu einer anderen Basis bewirkt die Multiplikation mit einem skalaren Faktor. Abgesehen von einem solchen Faktor bestimmen die Komponenten des Tensors $p^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ den Unterraum T^r und umgekehrt. Im Wesentlichen sind diese Größen *Grassmann*sche Koordinaten, denn es gilt

$$r!\,\underset{1}{\bar v}\wedge\underset{2}{\bar v}\wedge\ldots\wedge\underset{r}{\bar v}=\delta^{a_1 a_2 \ldots a_r}_{1\,2\,\ldots\,r}\cdot\underset{a_1}{\bar v}\otimes\underset{a_2}{\bar v}\otimes\ldots\otimes\underset{a_r}{\bar v}$$

($\wedge$ bezeichne das äußere und $\otimes$ das Tensorprodukt.)

Die Parallelverschiebung des Tensors $p^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ längs der Kurve γ wird durch die Gleichungen

$$p^{i_1 i_2 \ldots i_r}{}_{,k}\cdot\frac{dx^k}{dt}=0 \tag{3}$$

erklärt, wobei für die kovarianten Ableitungen gilt:

$$p^{i_1 i_2 \ldots i_r}{}_{,k}=\frac{\partial p^{i_1 i_2 \ldots i_r}}{\partial x^k}+\sum_{s=1}^{r}L^{i_s}_{jk}\,p^{i_1 i_2 \ldots i_{s-1}\, j\, i_{s+1}\ldots i_r} \tag{4}$$

Neben dieser Parallelverschiebung von Tensoren (Multivektoren) kann nach *K. H. Weise* [1] ein Parallelismus von Tensoren längs einer Kurve γ betrachtet werden. Ein Feld von Tensoren $q^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ heiße bezüglich der Kurve parallel, es bilde ein Parallelfeld, wenn eine skalare Funktion $\varphi(t) \neq 0$ existiert, so daß der Tensor $p^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ längs γ parallel verschoben ist und $q^{i_1 i_2 \ldots i_r}=\varphi\cdot p^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ gilt. Wir können nun auch sagen: Durch das Parallelfeld der Tensoren $q^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ wird eine *Parallelverschiebung des Vektorraums* T^r längs der Kurve γ repräsentiert.

Im Folgenden sollen nun einige Eigenschaften dieser Parallelverschiebung von Vektorräumen $T^r < T^n$ für allgemeine affine Zusammenhänge und insbesondere für Riemannsche Zusammenhänge angegeben werden.

1) Werden bereits die Basisvektoren $\underset{a}{v}^i$ $(a = 1, 2, \ldots r)$ jeweils einzeln für sich längs der Kurve γ parallel verschoben, d.h., gilt

$$\underset{a}{v}^i{}_{,k}\cdot\frac{dx^k}{dt}=0 \qquad (a=1,2,\ldots r),$$

so folgt wegen der Produktregel für kovariante Ableitungen

$$p^{i_1 i_2 \ldots i_r}{}_{,k}=\delta^{a_1 a_2 \ldots a_r}_{1\,2\,\ldots\,r}\cdot[\underset{a_1}{v}^{i_1}{}_{,k}\,\underset{a_2}{v}^{i_2}\ldots\underset{a_r}{v}^{i_r}+\ldots+\underset{a_1}{v}^{i_1}\ldots\underset{a_{r-1}}{v}^{i_{r-1}}\,\underset{a_r}{v}^{i}{}_{,k}]$$

sofort, daß auch das Feld der Multivektoren $p^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ längs der Kurve γ parallel verschoben ist.

Umgekehrt kann ein solches Tensorfeld durch Parallelverschiebung eines Multivektors längs γ entstanden sein, ohne daß die einzelnen Basisvektoren $\underset{a}{v}^i$ jeweils parallel verschoben sind.

In gleicher Weise erkennt man: Bilden bereits die Basisvektoren

$$\underset{a}{w}^i=\varphi_a\cdot\underset{a}{v}^i,\quad \underset{a}{v}^i{}_{,k}\cdot\frac{dx^k}{dt}=0$$

des Unterraumes $T^r < T^n$ längs γ jeweils ein Parallelfeld von Vektoren, so ist auch das Feld der Multivektoren

$$q^{i_1 i_2 \ldots i_r}=\Phi(t)\cdot p^{i_1 i_2 \ldots i_r},\quad \Phi(t)=\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\ldots\varphi_r(t)$$

parallel. Die Umkehrung ist im allgemeinen wiederum nicht notwendig erfüllt.

2) Im besonderen kann man auch die *Parallelverschiebung des Tangentialraumes* T^n, d.h. das *Parallelfeld der Tangentialtensoren* der Mannigfaltigkeit M^n längs γ

betrachten. Es seien wiederum $\underset{a}{v}$ für a = 1, 2, ... n Basisvektoren von T^n in P, dann ist gemäß (2) für r = n

$$p^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{a_1\, a_2 \ldots a_n}_{1\; 2 \ldots n}\, \underset{a_1}{v}^{i_1}\, \underset{a_2}{v}^{i_2} \ldots \underset{a_n}{v}^{i_n} = \Lambda \cdot \delta^{i_1\, i_2 \ldots i_n}_{1\; 2 \ldots n}$$

mit $\Lambda = \det \underset{a}{v}^{i}$. Dieser skalare Faktor kann bei Betrachtung des Parallelfeldes wiederum unterdrückt werden.

Damit nimmt die Bedingung für den Parallelismus von T^n längs der Kurve γ die Form an

$$\sum_{s=1}^{n} L^{i_s}_{jk}\, \delta^{i_1 \ldots i_{s-1}\, j\, i_{s+1} \ldots i_n}_{1 \ldots\ \ s\ \ \ldots n} \cdot \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Da hierin Summanden mit $j \neq i_s$ verschwinden, ergibt sich

$$L^{j}_{jk} \cdot \frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{5}$$

Im Sonderfall eines *Riemannschen Zusammenhangs* zum Maßtensor g_{ij} sind die Zusammenhangskomponenten die *Christoffel*schen Symbole zweiter Art:

$$L^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk}.$$

Wegen

$$\Gamma^{j}_{jk} = \frac{1}{2\,g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^k} \quad \text{mit } g = \det g_{ij} \neq 0$$

gelangen wir schließlich zur Bedingung

$$\frac{dg}{dt} = 0$$

längs γ. Nun gilt für das Volumselement dV des Riemannschen Raumes

$$dV = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Somit gelangen wir zu dem Satz:

Läßt sich der Tangentialraum T^n *einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* M^n *längs einer Kurve* $\gamma < M^n$ *parallel verschieben, so herrscht längs* γ *Volumstreue.*

So finden wird z.B. für eine Fläche M^2, die in einem Euklidischen Raum E^3 eingebettet sei, im Falle eines hyperbolischen Paraboloides mit der Gleichung $z = xy$ (in cartesischen Koordinaten) längs der Kurve γ mit $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = a^2 \sin t \cdot \cos t$ Flächentreue (Übereinstimmung der Flächenelemente), sowie längs γ parallel verschobene Tangentialebene T^2. Längs γ gilt nämlich

$$g = 1 + a^2 = \text{konst.}$$

3) Die Verträglichkeit des Riemannschen Zusammenhanges Γ^{i}_{jk} mit der Metrik g_{ij} findet im Lemma von *Ricci* ihren Ausdruck; für die zugehörige kovariante Differentiation gilt demnach

$$g_{ij,k} = 0. \tag{6}$$

In der Riemannschen Geometrie läßt die Parallelverschiebung von Vektoren (im Sinne von *Levi-Civita*) deren Länge und Winkel unverändert. Im Folgenden sollen diese Eigenschaften auch für die Parallelverschiebung von Multivektoren nachgewiesen werden.

Dem Tensor $P^{i_1 i_2 \dots i_r}$ kann als *Betrag* oder *Inhalt*

$$V(\bar{p}) = \left| \frac{1}{r!} p^{j_1 j_2 \dots j_r} \cdot p_{j_1 j_2 \dots j_r} \right|^{1/2} \tag{7}$$

zugeordnet werden. Hierbei ist

$$p_{j_1 j_2 \dots j_r} = p^{i_1 i_2 \dots i_r} \cdot g_{i_1 j_1} \cdot g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_r j_r}$$

und bedeutet $V(\bar{p})$ das r-dimensionale Volumen des von den Basisvektoren $\underset{1}{\bar{v}}, \underset{2}{\bar{v}}, \dots \underset{r}{\bar{v}}$ aufgespannten Spates. Der Zusammenhang mit der *Gram*schen Determinante ist durch

$$[V(\bar{p})]^2 = \det(\underset{a}{\bar{v}}\, \underset{b}{\bar{v}})$$

gegeben, wobei

$$\underset{a}{v}_i = \underset{a}{v}^j g_{ij}$$

gesetzt wurde und

$$(\underset{a}{\bar{v}}\, \underset{b}{\bar{v}}) = \underset{a}{v}^i \underset{b}{v}_i$$

das innere Produkt bedeute.

Mittels (6) folgt sofort

$$p_{j_1 j_2 \dots j_r, k} = p^{i_1 i_2 \dots i_r}{}_{,k} \cdot g_{i_1 j_1} \cdot g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_r j_r}$$

und somit die mit (3) gleichwertige kovariante Formel

$$p_{i_1 i_2 \dots i_r, k} \cdot \frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{8}$$

Wegen

$$(p^{i_1 \dots i_r} \cdot p_{i_1 \dots i_r})_{,k} = p^{i_1 \dots i_r}{}_{,k} \cdot p_{i_1 \dots i_r} + p^{i_1 \dots i_r} \cdot p_{i_1 \dots i_r, k}$$

bleibt somit der Betrag des Multivektors $\bar{p}$ *bei Parallelverschiebung längs* γ *erhalten.* Die Überschiebung mit dx^k/dt liefert nämlich:

$$(p^{i_1 \dots i_r} \cdot p_{i_1 \dots i_r})_{,k} \cdot \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Um auch die Konstanz des Winkels zweier parallelverschobener Multivektoren und damit verbundener Unterräume T^r und $\hat{T}^r$ nachzuweisen, müssen geeignete Winkeldefinitionen herangezogen werden. T^r und $\hat{T}^r$ seien windschiefe Unterräume von T^n, so daß auch für den direkten Summenraum $T^r \oplus \hat{T}^r = T^{2r} < T^n$ gilt, was $2r \leqslant n$ bedingt.

Wie früher sei $\underset{a}{\bar{v}}$ $(a = 1, 2, \dots r)$ eine Basis in T^r und führe zum Multivektor $p^{i_1 \dots i_r}$, ebenso sei $\underset{a}{\bar{w}} = \underset{a+r}{\bar{v}}$ $(a = 1, 2, \dots r)$ eine Basis in $\hat{T}^r$ und führe zu $\hat{p}^{j_1 \dots j_r}$. Der Summenraum besitzt dann in $\underset{a}{\bar{v}}$ $(a = 1, 2, \dots 2r)$ eine Basis. Ihm entspricht der Tensor

$$q^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{2r}} = \delta_{1 \dots 2r}^{a_1 \dots a_{2r}} \underset{a_1}{v}^{i_1} \dots \underset{a_r}{v}^{i_r} \underset{a_{r+1}}{v}^{i_{r+1}} \dots \underset{a_{2r}}{v}^{i_{2r}},$$

wofür man auch schreiben kann

$$q^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{2r}} = \frac{1}{(r!)^2} \delta_{a_1 \dots a_{2r}}^{1 \dots 2r} p^{i_{a_1} \dots i_{a_r}} \cdot \hat{p}^{i_{a_{r+1}} \dots i_{a_{2r}}}.$$

Mittels der r-dimensionalen bzw. 2r-dimensionalen Volumina der Basisspate sei nun nach *W. Degen* [2] der Winkel φ zwischen T^r und $\hat{T}^r$ durch die folgende Formel erklärt:

$$V(\bar{q}) = V(\bar{p} \oplus \bar{\hat{p}}) = \sin^r \varphi \cdot V(\bar{p}) \cdot V(\bar{\hat{p}}). \tag{9}$$

Wegen der *Hadamard*schen Ungleichung für *Gram*sche Determinanten gilt

$$0 \leq \frac{V(\bar{p} \oplus \bar{\hat{p}})}{V(\bar{p}) \cdot V(\bar{\hat{p}})} \leq 1$$

und ist somit der Winkel φ in $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ eindeutig bestimmt.

Durch kovariante Ableitung des Tensors $\bar{q}$ und Anwendung der Produktregel erkennen wir sofort, daß aus der Parallelverschiebung der Tensoren $\bar{p}$ und $\bar{\hat{p}}$ und damit der Vektorräume T^r, $\hat{T}^r$ längs einer Kurve $\gamma < U$ auch die Parallelverschiebung von $\bar{q}$ und damit des Summenraums T^{2r} folgt. Aus der Erhaltung der Volumina $V(\bar{p})$, $V(\bar{\hat{p}})$ und $V(\bar{p} \oplus \bar{\hat{p}})$ folgt somit die *Erhaltung des Winkels zwischen windschiefen Unterräumen gleicher Dimension.*

Auch wenn man in Anlehnung an *W. H. Greub* [3] einen anderen Winkelbegriff zugrunde legt, bleibt diese Eigenschaft bestehen. Durch

$$(\bar{p}\bar{\hat{p}}) = p^{i_1 \dots i_r} \cdot \hat{p}_{i_1 \dots i_r} = r! \cdot \det(\underset{a}{\bar{v}} \underset{b}{\bar{w}})$$

werde das innere Produkt der Tensoren $\bar{p}$ und $\bar{\hat{p}}$ definiert, dann ist gemäß (7)

$$(\bar{p}\bar{p}) = r! \, [V(\bar{p})]^2.$$

Der Winkel φ^* werde nun durch

$$(\bar{p}\bar{\hat{p}})^2 = \cos^2 \varphi^* \cdot (\bar{p}\bar{p}) \cdot (\bar{\hat{p}}\bar{\hat{p}}) \tag{10}$$

erklärt, woraus sich die Winkeltreue wegen (3), (8) und

$$(\bar{p}\bar{\hat{p}})_{,k} \cdot \frac{dx^k}{dt} = 0$$

erkennen läßt.

Damit sind auf direktem Wege die wichtigsten Eigenschaften der Parallelverschiebungen von Vektoren im Sinne von Levi-Civita verallgemeinert.

Literatur

Allgemein: (Lehrbücher und Monographien)

Heinrich Guggenheimer, Differential Geometry, McGraw-Hill Book Comp 1963

Detlef Laugwitz, Differentialgeometrie, B. G. Teubner Verl. Ges. 1960

T. J. Willmore, An introduction to Differential Geometry, Oxford University Press 1959

Im besonderen:

(1) *K. H. Weise*, Autoparallele Mannigfaltigkeiten im affin zusammenhängenden Raum. Math. Zeitsch. *40* (1936) 208–220

(2) *W. Degen*, Geometrische Deutung des Dralls eines Axoids (1966), Über die Winkel zwischen Unterräumen in mehrdimensionalen euklidischen Räumen. (1973) erscheint in Revues Roumaines de Mathématiques pures et appliquées.

(3) *W. H. Greub*, Linear Algebra. Springer Verl. 1967